PRODOTTO SCALARE

Sia V uno spazio vett su $\mathbb{K}$, con $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Un <u>prodotto SCALARE</u> è una funzione.

$$V \times V \to \mathbb{K}$$

con questo simbolo

$$(v_1, v_2) \to \langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{K}$$

con le seguenti 3 PROPRIETÀ

1. $$\langle a_1 u_1 + b u_2, v \rangle = a_1 \langle u_1, v \rangle + b \cdot \langle u_2, v \rangle \quad \forall u_1, u_2, v \in V$$
   $$\text{e } \forall a, b \in \mathbb{K}$$

2. $$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$
   $$\forall u, v \in V$$

(se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ovviamente $\overline{\langle v, u \rangle} = \langle v, u \rangle$)

③ $\forall\, v \in V$ vale

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \text{e}$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \text{ se e solo se } v = 0.$$

<u>Oss</u> Anche se siamo in $\mathbb{C}$ ha senso scrivere $\langle v, v \rangle \geq 0$ perché $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$.

Infatti per la ②

$$\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle}$$

quindi $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$.

Oss Dalle proprietà ① e ②

segue

$$\langle u, a v_1 + b v_2 \rangle = \bar{a} \langle u, v_1 \rangle + \bar{b} \langle u, v_2 \rangle$$

Esempi In $\mathbb{R}^n$ c'è il prodotto scalare standard:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle =$$

scritti rispetto alla base standard

$$= a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

In $\mathbb{C}^n$ analogamente

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + \quad + a_n \overline{b_n}$$

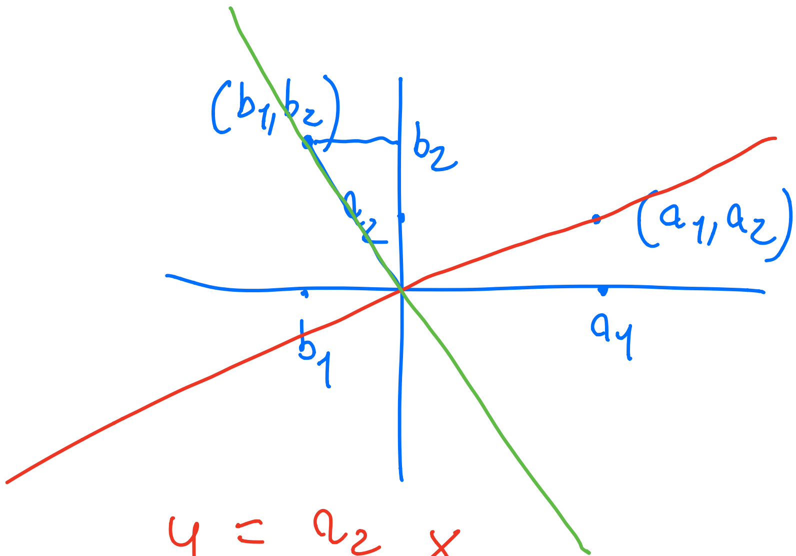
(chiamato anche prodotto scalare hermitiano)

"Amarcord"

In $\mathbb{R}^2$ col prodotto scalare standard.

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$



$$y = \frac{a_2}{a_1} x$$

$$y = \frac{b_2}{b_1} x$$

se

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{b_2}{b_1} = -1 \quad \text{allora}$$

le due rette sono ortogonali

equivale

$$a_2 b_2 = -a_1 b_1$$

equivale

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

Esempio: Sia $C[a,b]$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue

$$[a,b] \to \mathbb{R}$$

Se $f, g \in C[a,b]$

posso sommare $f+g$

e moltiplicare per un numero reale $3f$

(è uno spazio vettoriale di dimensione infinita).

Definisco

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

Verificate che questo è un prodotto scalare.

ORTOGONALITÀ

Sia V sp. vett su $\mathbb{K}$ e sia $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare su V.

Definizione Due vettori

$u, v \in V$ sono detti ORTOGONALI

se

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Oss anche $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} = \overline{0} = 0$

Oss 0 è ortogonale a v per ogni $v \in V$

Infatti:

$$\langle 0, v \rangle =$$

$$= \langle 0 \cdot 0, v \rangle =$$

per linearità

$$= 0 \, \langle 0, v \rangle = 0$$

<u>Def</u> Sia U sottospazio di V

Poniamo

$$U^{\perp} = \{ v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U \}$$

<u>Esercizio</u> Verificare che $U^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V.

<u>Esempio</u> Sia $V = \mathbb{R}^3$

$\langle\ ,\ \rangle$ prodotto scalare standard.

Sia $U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Chi è $U^\perp$?

$$U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \text{tc} \right.$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{e}$$

$$\left. \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

equivale a calcolare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $U^\perp$ coincide con lo spazio dato dalle soluzioni del sistema..

$$U^\perp = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Chi è $(U^\perp)^\perp$? Sono le soluzioni:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Lo spazio delle soluzioni ha dim 2

Inoltre contiene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allora $(U^\perp)^\perp$ ha dim 2 e contiene U, dunque

$$(U^\perp)^\perp = U$$

Def Un insieme $\{v_1, \dots, v_r\}$ di vettori di V si dice ORTOGONALE se

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall\, i \neq j$$

L'insieme $\{v_1, \dots, v_r\}$ si dice ORTONORMALE se è ortogonale e inoltre $\langle v_i, v_i \rangle = 1 \quad \forall i$.

PROBLEMA.

Dato U sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ il prod. scalare standard.

Come posso trovare una base di U ortonormale?

$$< \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix}, \alpha \begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}5\\0\\-1\\0\end{pmatrix} > = 0$$

Teorema 8.10 delle dispense.

Sia $\{u_1, \ , u_r\}$ un insieme ORTONORMALE di vettori.

Allora

1. $\{u_1, , u_r\}$ sono LIN INDIPENDENTI

2. $\forall\, v \in V$ il vettore

$$w = v - <v, u_1> u_1 - <v, u_2> u_2 - \\ - <v, u_r> u_r$$

è ortogonale a tutti gli v_i, dunque appartiene a $\text{Span}(v_1, , v_r)^\perp$.

Dim ①

$$a_1 v_1 + \quad + a_r v_r = 0$$

devo dim che $a_1 = a_2 = \quad = a_r = 0$

faccio il prodotto scalare di entrambi i membri contro v_1.

$$\langle a_1 v_1 + \quad + a_r v_r, v_1 \rangle = \langle 0, v_1 \rangle$$

$$a_1 \langle v_1, v_1 \rangle = 0$$

$$a_1 = 0$$

allo stesso modo si dimostra che $a_i = 0 \; \forall i$.

2

$$\langle w, u_i \rangle =$$

$$= \langle \underbrace{v - \langle v, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle v, u_n \rangle u_n}_{w}, \; u_i \rangle =$$

linearity

$$= \langle v, u_i \rangle - \langle v, u_1 \rangle \langle u_1, u_i \rangle - \dots$$

$$- \langle v, u_n \rangle \langle u_n, u_i \rangle =$$

$$= \langle v, u_i \rangle - \langle v, u_i \rangle \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_{1} =$$

$$= 0$$

M

Esempio Si consideri la base

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ col prod. scalare standard.

Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

u_1, u_2, u_3 t.c.

$$\mathrm{Span}(u_1) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Span}(u_1, u_2) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cioè $= \mathbb{R}^3$

(era implicito quando

ha detto che
v_1, v_2, v_3 è BASE)

Rango

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \langle u_1, u_1 \rangle = 1$$

$$u_2 = \,?$$

Però il teorema precedente so che

$$\underbrace{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}$$

- è ortogonale a u_1.
- non è 0 perché v_2 e u_1 sono LIN INDIP
$u_1 = v_1$

Rango

$$u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\| v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 \|}$$

dove $\forall$ vettore v il simbolo

$$\| v \| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

e si chiama NORMA di v.

Per trovare

$$u_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2}{\| v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 \|}$$

QUESTO È UN ESEMPIO DEL METODO DI ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT